Ποια είναι η πιο μεγάλη τοπολογία έτσι ώστε $\mathcal{A} \subseteq P(\mathcal{E})$; αν ∃;
Απάντηση Η διακριτή

Ποια είναι η "ελάχιστη" τοπολογία έτσι ώστε $\mathcal{A} \subseteq P(\mathcal{E})$
ΑΠΑΝΤΗΣΗ $\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \cap \{\mathcal{T}$: τοπολογία αν $\mathcal{E}$ κ' $\mathcal{A} \in \mathcal{T}\}$,
(τοπολογία στο $\mathcal{E}$ να περιέχει τη συλλογή $\mathcal{A}$)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad \mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1\}\}$

Είναι τοπολογία; ΟΧΙ, την κάνω.

$\mathcal{T}(\mathcal{A}) = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1\}, \mathcal{E}, \emptyset, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}\}$

Είναι η ελάχιστη τοπολογία; ΝΑΙ (*)

- $\{1, 2\} \cap \{1\} = \{1\} \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$
- $\{1, 2\} \cap \{3, 4\} = \emptyset \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$
- $\{3, 4\} \cap \{1\} = \emptyset \in \mathcal{T}(\mathcal{A})$

Έπειτα βρίσκω τις ενώσεις
- $\{1, 2\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $\{3, 4\} \cup \{1\} = \{1, 3, 4\}$

(*) • $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1\} \in \mathcal{A}$ δεν μπορούν να λείπουν
• $\mathcal{E}, \emptyset$ από ορισμό δεν μπορούν να λείπουν
• $\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}$ είναι οι ενώσεις δεν μπορούν να λείπουν

ΤΡΟΠΟΣ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΤΗΣ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ

$\mathcal{A} \subseteq P(\mathcal{E})$

ΟΡΙΣΜΟΣ

όλες οι πεπερασμένες τομές στοιχείων του $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A}_T := \{X := \bigcap_{k=1}^{n} A_i,\ A_i \in \mathcal{A} \lor X = \mathcal{E}\}.$$

ή

ΟΡΙΣΜΟΣ

αυθαίρετες ενώσεις

$\mathcal{B}_{\varepsilon} = \{ Y = \bigcup_{i \in I_1} A_i \ , A_i \in I, \ I_1 \subseteq I \ \vee \ Y = \emptyset \}$

" $\mathcal{A}_{\varepsilon}$

ΛΗΜΜΑ

i) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\tau}, \mathcal{A}_{\varepsilon}$

ii) $\mathcal{A}_{\tau\tau} \subseteq \mathcal{A}_{\tau}$ Παίρνω τις πεπερασμένες τομές φτιάχνω ένα καινούργιο σύνολο και ξαναπαίρνω τις πεπερασμένες τομές. Είναι, όμως, οι πεπερασμένες τομές των πεπερασμένων τομών

iii) $\mathcal{A}_{\varepsilon\varepsilon} \subseteq \mathcal{A}_{\varepsilon}$
(ίδιο με τομές)

iv) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \subseteq P(E) \Rightarrow \mathcal{A}_{\tau} \subseteq \mathcal{B}_{\tau}$ κι $\mathcal{A}_{\varepsilon} \subseteq \mathcal{B}_{\varepsilon}$

Διατηρούν την διάταξη του εγκλεισμού

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (iv)

Ας είναι $\mathcal{A}_{\tau} \Rightarrow \exists A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, $X = \bigcap_{i \in I}^{n} A_i$

Άλλα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, άρα $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$, $X \in \bigcap_{i \in I}^{n} B_i$

ΠΡΟΤΑΣΗ

$(E, \mathcal{C})$ τυχαία $\mathcal{A} \subseteq P(E)$ μη κενό, τότε $\mathcal{C}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}_{\tau\varepsilon}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Θ.δ.ο. η $\mathcal{A}_{\tau\varepsilon}$ είναι τοπολογία

i) $\emptyset, E$, Όταν ορίσαμε $\mathcal{A}_{\tau}$ βάλαμε το E
Όταν ορίσαμε $\mathcal{A}_{\varepsilon}$ βάλαμε το $\emptyset$
Άρα ανήκουν στην $\mathcal{A}_{\tau\varepsilon}$

ii) Ας είναι $A, B \in \mathcal{A}_{\tau\varepsilon}$ Θ.δ.ο. $A \cap B \in \mathcal{A}_{\tau\varepsilon}$
Επειδή $A \in \mathcal{A}_{\tau\varepsilon} \Rightarrow A = \bigcup_{i \in I} X_i$, με $X_i \in \mathcal{A}_{\tau}$, δηλαδή

$A = \bigcup_{i\in I} (X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_n})$ με $X_{i_1}, \ldots, X_{i_n} \in \mathcal{A}$.

Ομοίως, $B \in \mathcal{A}_{TE} \Rightarrow B = \bigcup_{j\in J} (Y_{j_1} \cap \ldots Y_{j_m})$ με $Y_{j_1}, \ldots, Y_{j_m} \in \mathcal{A}$

Άρα $A \cap B = [\bigcup_{i\in I} \underbrace{(X_{i_1} \cap \ldots X_{i_n})}_{X_i}] \cap [\bigcup_{j\in J} \underbrace{Y_{j_1} \cap \ldots Y_{j_m})}_{Y_i}] =$

$\underbrace{\bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J}}_{\text{αυθαίρετες ενώσεις}} \underbrace{(X_i \cap Y_j)}_{\in \mathcal{A}_T} \Big\} \in \mathcal{A}_{TE}$.

πεπερ. τομές

iii) H.W.

Ας είναι $A_j \subseteq \mathcal{A}_{TE}$ τότε θ.δ.ο. $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{A}_{TE}$.

Αν $\{A_j : j\in J\} \subseteq \mathcal{A}_E$, τότε $\forall j \in J$ $\exists$ ένα σύνολο δεικτών I_j, τέτοιο ώστε $A_j = \bigcup_{i\in I_j} B_i$, όπου $\{B_i : i \in I_j\} \subseteq \mathcal{A}$.

Άρα $\bigcup_{j\in J} A_j = \bigcup_{j\in J} (\bigcup_{j\in I_j} B_i) \in \mathcal{A}_E \supseteq \mathcal{A}_{TE}$

Επομένως, $\bigcup_{j\in J} A_j \in \mathcal{A}_{TE}$.

Επομένως η συλλογή $\mathcal{A}_{TE}$ είναι τοπολογία

Συνεπώς, θα είναι $\mathcal{T}(A) \subseteq \mathcal{A}_{TE}$

Αρκεί ν.δ.ο. $\mathcal{A}_{TE} \subseteq \mathcal{T}(A)$

Πράγματι, αν $X \in \mathcal{A}_{TE}$, τότε $X = \bigcup_{i\in I} X_i$ με $X_i \in \mathcal{A}_T$ δηλαδή, $X_i = X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_k}$, $k \in \mathbb{N}$ και $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k} \in \mathcal{A}$

Όμως $X_{i_1}, \ldots, X_{i_k} \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}(A)$

Άρα $X_{i_1} \cap \ldots \cap X_{i_k} \in \mathcal{T}(A)$ και $\bigcup X_i \in \mathcal{T}(A) \Rightarrow X \in \mathcal{T}(A)$

Άρα, $\mathcal{A}_{TE} \subseteq \mathcal{T}(A)$

Επομένως, $\mathcal{A}_{TE} = \mathcal{T}(A)$ είναι η ελάχιστη τοπολογία.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$(\mathbb{R}, |\cdot|) - \mathcal{T}$

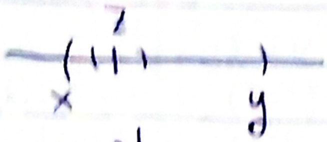
$\mathcal{B}_d = \{(-\infty, a], [b, +\infty), \ a, b \in \mathbb{R}\}$

Για τις τομές: αν $a<b$, τότε $d = \emptyset$

αν $a=b$, τότε είναι όλη η ευθεία

αν $b<a$, τότε d $[a,b]$

Έστω



Παίρνω την ελάχιστη απόσταση από το z στο x ή το y. Διαιρώ την απόσταση αυτή διά δύο, άρα έχω την ανοιχτή μπάλα με κέντρο το z, η οποία εμπεριέχεται εξ' ολοκλήρου στο διάστημα (x,y). Παίρνω όλες τις ενώσεις αυτές και έτσι παίρνω όλο το διάστημα (x,y)

Επομένως, όλες οι αυθαίρετες ενώσεις ανήκουν στο d.

Η τοπολογία που γεννά η d είναι η μεγαλύτερη ή η λεπτότερη από την $\mathcal{T}$ (την συνήθη τοπολογία)

Αν $(-\infty, a] \cap [a, +\infty) = \{a\}$ (είναι η διακριτή τοπολογία)

Αν $(-\infty, a), (b, +\infty)$ είναι η ίδια με $\mathcal{T}$

ΒΑΣΗ ΤΟΠΟΛΟΓΙΑΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια υποσυλλογή $\mathcal{B} \subseteq P(E)$, ονομάζεται βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$ αν οι αυθαίρετες ενώσεις $\mathcal{B}_\varepsilon$ δίνουν την τοπολογία $\mathcal{T}$.
Δηλαδή, $\mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{T}$.
Προφανώς, τα στοιχεία της βάσης είναι ανοιχτά σύνολα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

A $\quad \forall x \in A, \exists \varepsilon > 0 : \mathcal{B}(x, \varepsilon) \subseteq A$

$\mathcal{B}_1 := \{B(x, \varepsilon), x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$, βάση της τοπολογίας.

Μπορώ να βρω μια πιο μικρή βάση;
$\mathcal{B}_2 = \{B(x, \varepsilon), 0 < \varepsilon < 1\}$. [Είναι πολλά τα ε]

Άρα ψάχνω πιο μικρή βάση: $\mathcal{B}_3 := \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$
(Έχουμε πολλά x, καθώς $x \in \mathbb{R}$ και η βάση είναι υπεραριθμήσιμη)

Άρα η μικρότερη δυνατή είναι η

$$\mathcal{B} := \{B(q, 1/n) : q \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}\}$$

$A \in \mathcal{T}_{|\cdot|} \Rightarrow \forall x \in A, \exists q \in \mathbb{Q}, \exists n \in \mathbb{N} : B(q, 1/n) \subseteq A$

Αν $A \in \mathcal{T}_{|\cdot|}$ και $x \in A \Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0 : B(x, \varepsilon_x) \subseteq A$
$\hookrightarrow (x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)$

Η βάση $\mathcal{B}$ είναι αριθμήσιμη.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $\mathcal{B} \neq \emptyset \subseteq \mathcal{T}$ με $\mathcal{B}_\varepsilon$ τοπολογία, τότε $\mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{T}$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω $(E, \mathcal{T})$ τοπολογικός χώρος (τ.χ.).
Ας είναι $\mathcal{A} \subseteq P(E)$ με $\mathcal{A} \neq \emptyset$.
Τότε $B \in \mathcal{A}_\varepsilon \iff B = \emptyset \vee [(\forall x \in B)(\exists A \in \mathcal{A})(x \in A \subseteq B)]$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

($\Rightarrow$) Ας είναι $B \in \mathcal{A}_\varepsilon$, $B \neq \emptyset$ (Αν $B = \emptyset$ το έχω σίγουρα μέσα)
Τότε $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ με $A_i \in \mathcal{A}$.

Επομένως, για $x \in B$ θα έχουμε $x \in \bigcup_{i \in I} A_i$. Άρα $\exists i_0 \in A$:
$x \in A_{i_0} \subseteq \bigcup A_i = B$

($\Leftarrow$) H.W.

Προταση (11.4.5 Σελ. 252)

$(E, \mathcal{T})$ τ.χ. και $\mathcal{B} \subseteq P(E)$, $\mathcal{B} \neq \emptyset$. Η συλλογη $\mathcal{B}$ ειναι βαση για την τοπολογια $\Longleftrightarrow$ $\cup\mathcal{B} = E$ και $\{(\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B})\ (\forall x \in B_1 \cap B_2)\} \Rightarrow \exists\, B \in \mathcal{B},\ x \in B \subseteq B_1 \cap B_2$

Αποδειξη

$(\Rightarrow)$ Εστω ότι $\mathcal{B}$ ειναι βάση για μια τοπολογια $\mathcal{T}$, δηλαδή, υποθέτω ότι $\mathcal{B}_E = \mathcal{T}$.

Προφανώς, $\cup\mathcal{B} = E$ (σίγουρα θα βρω το E, καθώς οι ενώσεις είναι μέσα στην $\mathcal{T}$)

Αν είναι $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$, άρα B_1, B_2 ανοιχτά και $x \in B_1 \cap B_2$

Τότε $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T} = \mathcal{B}_E$ με $x \in B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}_E$.

Δηλαδή, $x \in B_1 \cap B_2 = \bigcup_{j \in J} B_j$ με $B_j \in \mathcal{B}$, $j \in J$ για κάποιο σύνολο δεικτών $\Rightarrow \exists j_0 \in J : x \in B_{j_0} \subseteq \bigcup_{j \in J} B_j = B_1 \cap B_2$

Βρήκα ένα σύνολο μέσα στην τομή που να περιέχει το σύνολο

$(\Leftarrow)$ H.W. Πρέπει ν.δ.ο. $\mathcal{B}_E$ είναι τοπολογια

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Αφού $B_1, B_2 \in B$ που περιέχει ανοιχτά σύνολα, αναγκαστικά $B_1 \cap B_2$ ανοιχτό.

Γιατί παίρνω ένα άλλο B_i όμως;

Γιατί $B_1 \cap B_2$ δεν είναι απαραίτητα στοιχείο του B.

Η ΠΡΟΤΑΣΗ αυτή "ανακαθιστά" τον ορισμό για τη βάση της τοπολογίας.

ΠΡΟΤΑΣΗ (Είναι ένας άλλος χαρακτηρισμός για τη βάση της τοπολογίας)

Η συλλογή $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ είναι βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$ αν-ν $\forall A \in \mathcal{T}$, $\exists \mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$, $A = \cup \mathcal{C}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ (H.W.)

Περιγραφή: Εάν έχω μια υποσυλλογή $\mathcal{B}$ και θέλω να είναι βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}$, τότε έχω πάρει οποιοδήποτε στοιχείο του A, τότε $\exists$ τοπολογία, τ.ω. το A να γράφεται $\cup \mathcal{C}$

δηλ. το A γράφεται σαν αυθαίρετη ένωση του B.

ΠΡΟΤΑΣΗ

Αν $B \neq \emptyset \subseteq B^* \subseteq \mathcal{T}$, τότε B βάση για τη $\mathcal{T}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω B βάση, τότε $\mathcal{T} = B_\varepsilon \subseteq B_\varepsilon^* \subseteq \mathcal{T}_\varepsilon = \mathcal{T}$

(*) Εάν πάρω μια υποσυλλογή της B, δεν γνωρίζω αν μια είναι βάση

ΥΠΟΒΑΣΗ

$\mathcal{A} \to \mathcal{A}_{T\varepsilon} = \mathcal{T}(\mathcal{A})$

· έχω ένα σύνολο, όπου οι αυθαίρετες τομές, δηλαδή η $\mathcal{A}_T$, είναι υπόβαση της $\mathcal{T}$

Δηλαδή αν $\mathcal{A}$ υπόβαση της $\mathcal{T}$, τότε $\mathcal{A}_T$ βάση

Έχω μια τοπολογία $\mathcal{T}$ (δεν γνωρίζω αν παράγεται από κάποια συλλογή). Αν $\exists \mathcal{A}$ τ.ω. $\mathcal{A}_T$ βάση για την $\mathcal{T}$, $\mathcal{A}$ υπόβαση της $\mathcal{T}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν $\mathcal{B}$ βάση της $\mathcal{T} \Rightarrow \mathcal{B}$: υπόβαση

Αν $\mathcal{A}$ υπόβαση $\not\Rightarrow \mathcal{A}$: βάση

π.χ. $\mathcal{A} = \{\{x,y\}, x \neq y, x,y \in \mathbb{R}\}$ υπόβαση της $\mathbb{R}_d$ (διακριτή τοπολογία)

Δεν είναι όμως βάση. Δεν μπορώ να γράψω κανένα μονοσύνολο ως ένωση των $\{x,y\}$.

Δεν μπορώ να γράψω δηλαδή ένα μονοσύνολο ως δισύνολο.

ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

$(E_1, \mathcal{T}_1), (E_2, \mathcal{T}_2)$ $\quad E_1 \times E_2$

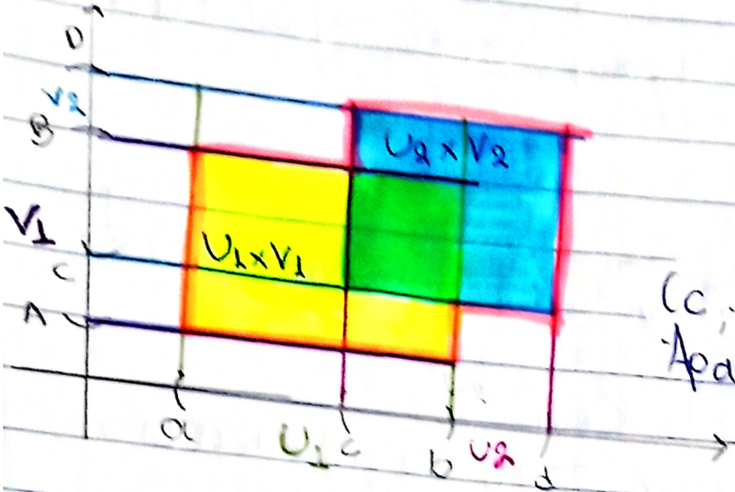
$U_1 \in \mathcal{T}_1$ (ανοιχτά σύνολα) / $U_1 \times V_1 \in \tilde{\mathcal{T}}$

$V_1 \in \mathcal{T}_2$

ΕΡΩΤΗΣΗ: $\{U_1 \times V_1, U \in \mathcal{T}_1, V \in \mathcal{T}_2\}$ είναι τοπολογία;

i) $\emptyset \in \tilde{\tau}$ ($U_1 \in \tau_1$ έχει το $\emptyset$, $V_1 \in \tau_2$ έχει το $\emptyset$)
$E_1 \times E_2 \in \tilde{\tau}$, $U_1 \in \tau_1$ έχει το E_1
$U_2 \in \tau_2$ έχει το E_2

ii) $U_1, U_2 \in \tau$ $\quad (U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \in \tilde{\tau}$;
$V_1, V_2 \in \tau$



* Εάν U_2 και U_1 ξένα τότε
$U_1 \cap U_2 = \emptyset$
Ομοίως, για τα V_1, V_2

$(c,d) \times (c,b) \in \tilde{\tau}$
Άρα οι πεπερασμένες τομές
είναι στο $\tilde{\tau}$

iii) Είναι οι ενώσεις στην $\tilde{\tau}$;

Δεν μπορώ να το γράψω σαν καρτεσιανό γινόμενο.
Επομένως η $\tilde{\tau}$ δεν είναι τοπολογία.
Η $\tilde{\tau}$ όμως χρησιμοποιείται σαν βάση της τοπολογίας.
Η τοπολογία που παράγεται από την $\tilde{\tau}$, ονομάζεται κουτί (box topology) → B_ε

Είναι ακριβώς η τοπολογία που παράγεται από την $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
(Η απόδειξη ότι η $\tilde{\tau}$ είναι βάση γίνεται με τις προηγούμενες Προτάσεις)